Oscillateurs harmoniques couplés

Chapitre I : Oscillateurs harmoniques couplés

Objectifs :

- *Analyser l'évolution de deux oscillateurs couplés*
- *Décrire qualitativement les effets des frottements fluides faibles.*

1. Rappels : l'oscillateur harmonique

1.1. Définition

On appelle oscillateur harmonique à une dimension un système dépendant d'un paramètre dont l'état est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$ *Oscillateur harmonique*

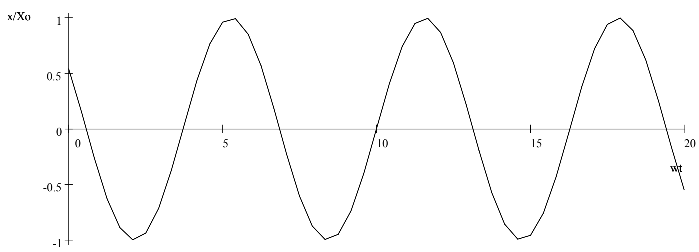
Le modèle de l'oscillateur harmonique intervient très souvent en physique car il convient, sauf cas exceptionnel, pour modéliser un système dépendant d'un paramètre évoluant au voisinage d'une position d'équilibre stable.

Exercice n° 01 :Approximation parabolique
Soit un système admettant une position d'équilibre stable pour $x = x_0$. Démontrer, en effectuant un développement limité de l'énergie potentielle du système, que localement le système est assimilable à un oscillateur harmonique.

1.2. Régime libre non amorti

- **Un oscillateur harmonique décrit par l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ est le siège d'oscillations isochrones de pulsation ω_0 :**

$$\boxed{x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$



- **L'énergie d'un oscillateur harmonique est une constante. Les oscillations correspondent à un échange entre deux formes d'énergie.**

Exercice n° 02 : Bilan énergétique
1) Faire le bilan énergétique d'un circuit (L, C).
2) Faire le bilan énergétique d'une masse suspendue à un ressort verticale de raideur k et soumise au champ de pesanteur $\vec{g}$.

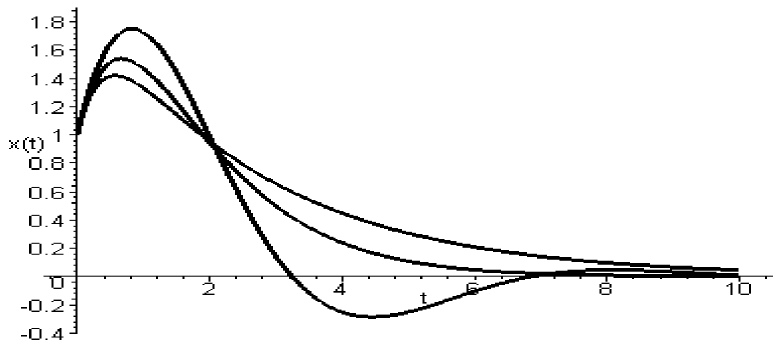
1.3. Oscillations amorties

Nous considérons un oscillateur mécanique amorti par frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$ ou un oscillateur électrique dissipant de l'énergie par effet joule.
Le système obéit donc à une équation différentielle du type :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$ *Oscillateur harmonique amorti*

Rappels : Les principales notions à connaître sont :
- trois régimes possibles en fonction de la valeur du facteur de qualité ;

- temps de relaxation τ ;
- pseudo - période T ;
- décrément logarithmique δ ;
- cas du régime pseudo-périodique faiblement amorti $\frac{E(t)-E(t+T)}{E(t)} \approx \frac{2\pi}{Q_0}$



Régimes libres pour $Q = 1/3$, $1/2$, 1

Remarque : pour des valeurs élevées du facteur de qualité le système est peu dissipatif et pour des temps d'observations faibles devant le temps caractéristique d'amortissement le système est pratiquement un oscillateur harmonique (non amorti).

1.4. Oscillations forcées

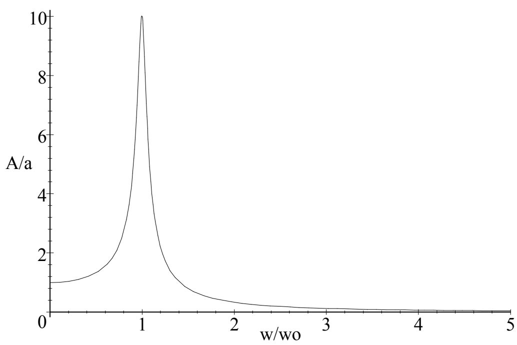
Nous soumettons un oscillateur harmonique amorti à une excitation sinusoïdale. Le système obéit alors à l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi)} \qquad \text{Oscillations forcees}$$

la solution est de la forme :

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega)) \text{ avec } A(\omega) = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q_0}\right)^2}} \text{ et } \phi(\omega) = \arg\left(\frac{a\omega_0^2 e^{j\varphi}}{(\omega_0^2-\omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q_0}}\right)$$

Remarque : pour un oscillateur harmonique peu amorti (facteur de qualité élevé) l'amplitude de ses déplacements devient **importante** lorsque la pulsation de l'excitation est proche de sa pulsation propre.

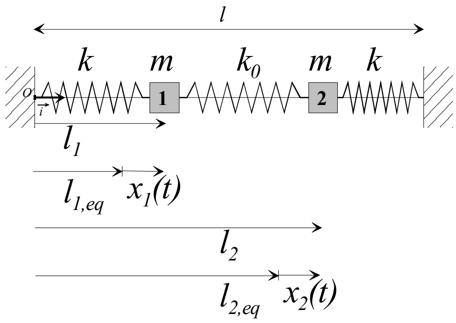


Exercice n° 03 : Amplitude des oscillations forcées
Démontrer les expressions de $A(\omega)$ et $\phi(\omega)$. Tracer les courbes correspondantes en distinguant différents cas.

2. Régime libre de deux oscillateurs harmoniques couplés

2.1. Description du système

On considère deux oscillateurs harmoniques identiques (masse m et ressort de raideur k) **couplés** par un ressort de raideur k_0.



Le ressort central introduit un **couplage** entre les deux mobiles : les mouvements des deux masses ne sont plus indépendants. On note :
- l la longueur totale,
- l_{vide} la longueur à vide des ressorts de constante de raideur k,
- $l_{0,vide}$ la longueur à vide du ressort de constante de raideur k_0,
- x_i l'abcisse (algébrique) de la masse m_i par rapport à sa position d'équilibre.

2.2. Mise en équation

- *Référentiel* : lié au support, supposé galiléen pour la durée de l'expérience.
- *Système* : successivement les masses 1 et 2.
- *Bilan des forces* :
  - pour la masse 1 :
    * action du ressort de gauche : $\vec{f}_{g,1} = -k(l_1 - l_{vide})\vec{i} = -k(l_{1,eq} + x_1 - l_{vide})\vec{i}$
    * action du ressort central : $\vec{f}_{c,1} = k_0((l_2 - l_1) - l_{0,vide})\vec{i} = k_0(l_{2,eq} + x_2 - l_{1,eq} - x_1 - l_{0,vide})\vec{i}$
  - pour la masse 2 :
    * action du ressort de droite : $\vec{f}_{d,2} = k((l - l_2) - l_{vide})\vec{i} = k(l - l_{2,eq} - x_2 - l_{vide})\vec{i}$
    * action du ressort central : $\vec{f}_{c,2} = -\vec{f}_{c,1} = -k_0((l_2 - l_1) - l_{0,vide})\vec{i} = -k_0(l_{2,eq} + x_2 - l_{1,eq} - x_1 - l_{0,vide})\vec{i}$

On applique la deuxième loi de Newton :

- à la masse 1
$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(l_{1,eq} + x_1 - l_{vide}) + k_0(l_{2,eq} + x_2 - l_{1,eq} - x_1 - l_{0,vide}) \qquad (1)$$
- à la masse 2
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(l - l_{2,eq} - x_2 - l_{vide}) - k_0(l_{2,eq} + x_2 - l_{1,eq} - x_1 - l_{0,vide}) \qquad (2)$$

A l'équilibre $x_1 = x_2 = 0$; les deux équations précédentes s'écrivent

$$-k(l_{1,eq} - l_{vide}) + k_0(l_{2,eq} - l_{1,eq} - l_{0,vide}) = 0 \qquad (3)$$
$$k(l - l_{2,eq} - l_{vide}) - k_0(l_{2,eq} - l_{1,eq} - l_{0,vide}) = 0 \qquad (4)$$

En retranchant membre à membre (1) et (3) d'une part et (2) et (4) d'autre part, nous obtenons

$$\boxed{\begin{cases} m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_0\,(x_2 - x_1) \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_0\,(x_2 - x_1) \end{cases}}$$

2.3. Résolution

Le système à résoudre est un système de deux équations différentielles couplées linéaires du second ordre.
Pour découpler ces équations on effectue le changement de variable suivant : $\left\{ \begin{array}{l} u = x_1 + x_2 \\ v = x_2 - x_1 \end{array} \right.$

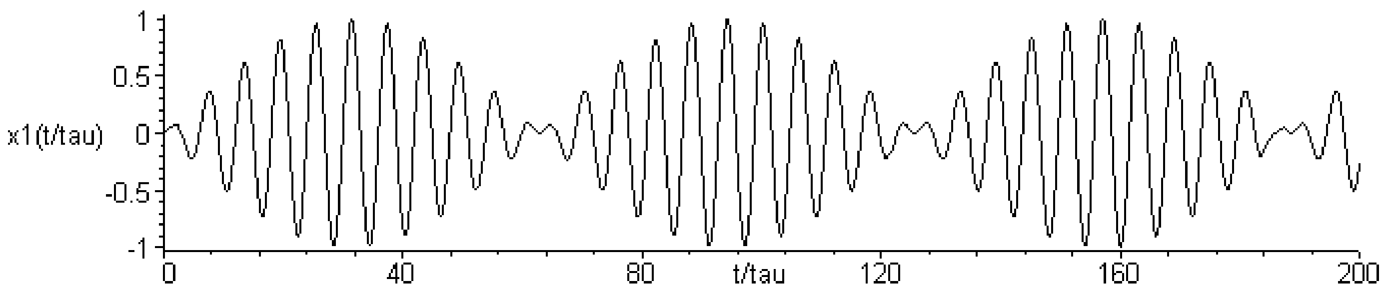
on obtient alors le système suivant : $\left\{ \begin{array}{l} m\frac{d^2u}{dt^2} + ku = 0 \\ m\frac{d^2v}{dt^2} + (k + 2k_0)\, v = 0 \end{array} \right.$

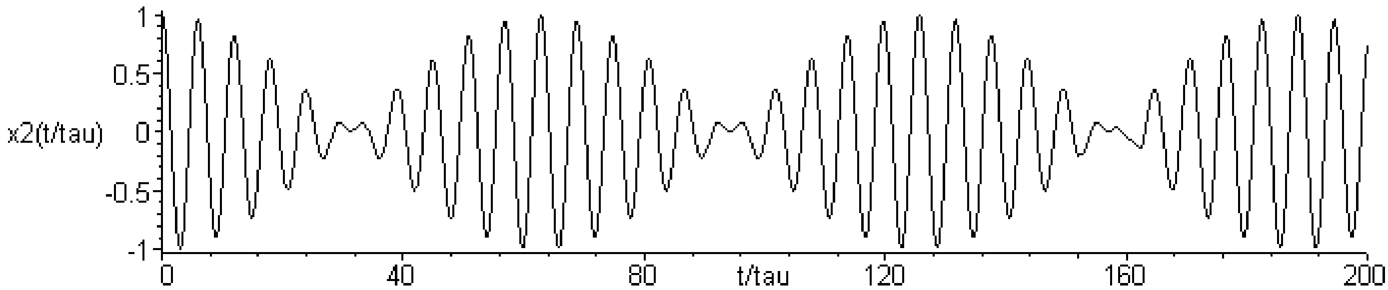
on reconnait deux oscillateurs harmoniques de pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_0}{m}}$

si on connaît les conditions initiales on a alors $\left\{ \begin{array}{l} u\,(t) = u_m \cos(\omega_1 t + \phi_u) \\ v\,(t) = v_m \cos(\omega_2 t + \phi_v) \end{array} \right.$ soit

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x_1\,(t) = \frac{u_m}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_u) - \frac{v_m}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_v) \\ x_2\,(t) = \frac{u_m}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_u) + \frac{v_m}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_v) \end{array} \right.}$$

Les mouvements des masses 1 et 2 sont donc la superposition de deux mouvements sinusoïdaux de pulsation ω_1 et ω_2 ; les courbes ci-dessous donnent les variations de x_1 et x_2 en fonction de t/τ avec $\tau = 1/\omega_1$ dans le cas où $\omega_2 = \frac{11}{10}\omega_1$ et $\phi_u = \phi_v = 0$ et $u_m = v_m = 1$.





Exercice n° 04 : Phénomène de battements

1) Déterminer les conditions initiales compatibles avec les tracés précédents. Interprétation physique.

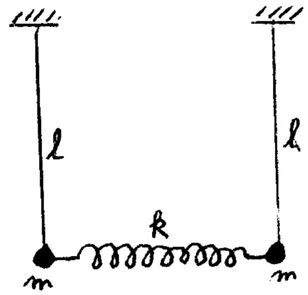
2) Déterminer les expressions des périodes $T_{battements}$ et $T_{oscillations}$ (attention à la définition de $T_{battements}$). Vérifier numériquement.

2.4. Pulsations et modes propres

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont appelées pulsations propres du système d'oscillateurs couplés.
Le système peut osciller à la pulsation ω_1 si $\forall t \;\; v(t) = 0$, donc lorsque $\forall t \;\; x_1(t) = x_2(t)$. Nous avons, dans ce cas, un mode propre d'oscillation associé à la pulsation ω_1. Dans ce mode propre les oscillations sont symétriques : les deux masses se déplacent en phase.
Le système peut également osciller à la pulsation ω_2 si $\forall t \;\; u(t) = 0$, donc lorsque $\forall t \;\; x_1(t) = -x_2(t)$. Nous avons, dans ce cas, un mode propre d'oscillation associé à la pulsation ω_2. Dans ce mode propre les oscillations sont antisymétriques : les deux masses se déplacent en opposition de phase.

Le système d'équations étant linéaires la solution générale est une combinaison linéaire des deux modes propres. Si les conditions initiales sont telles que le système se trouve à t=0 dans un mode propre alors il évoluera en permanence dans ce mode propre.

Exercice n° 05 : Pendules pesants couplés



On considère deux pendules simples identiques de masse m, de longueur l, reliés par un ressort de raideur k,de longueur à vide L_0. Les extrémités fixes A et B sont distantes de L_0. Le ressort reste horizontal. On désignera X_1 et X_2 les déplacements des masses m des pendules par rapport à l'équilibre.

1) Ecrire les équations différentielles du mouvement. On posera : $\omega = \sqrt{g/l}$ et $\Omega = \sqrt{k/m}$.

2.a) Déterminer les lois de variation au cours du temps de la différence $D = X_1 - X_2$ et de la somme $S = X_1 + X_2$ des déplacements.

2.b) A l'instant initial, on a : $X_1 = X_0$ et $X_2 = 0$. Exprimer les lois d'évolution $X_1(t)$ et $X_2(t)$ au cours du temps.

3. Généralisation : modes normaux de vibration (HP)

3.1. Définition

On appelle modes normaux ou propres de vibration d'un système, les modes de vibration harmoniques.
La solution générale n'est pas harmonique : c'est une combinaison linéaire des modes propres.
Un mode propre est réalisé pour des conditions initiales particulières qui annulent, dans la superposition des solutions harmoniques, toutes les contributions sauf l'une d'entre elles.

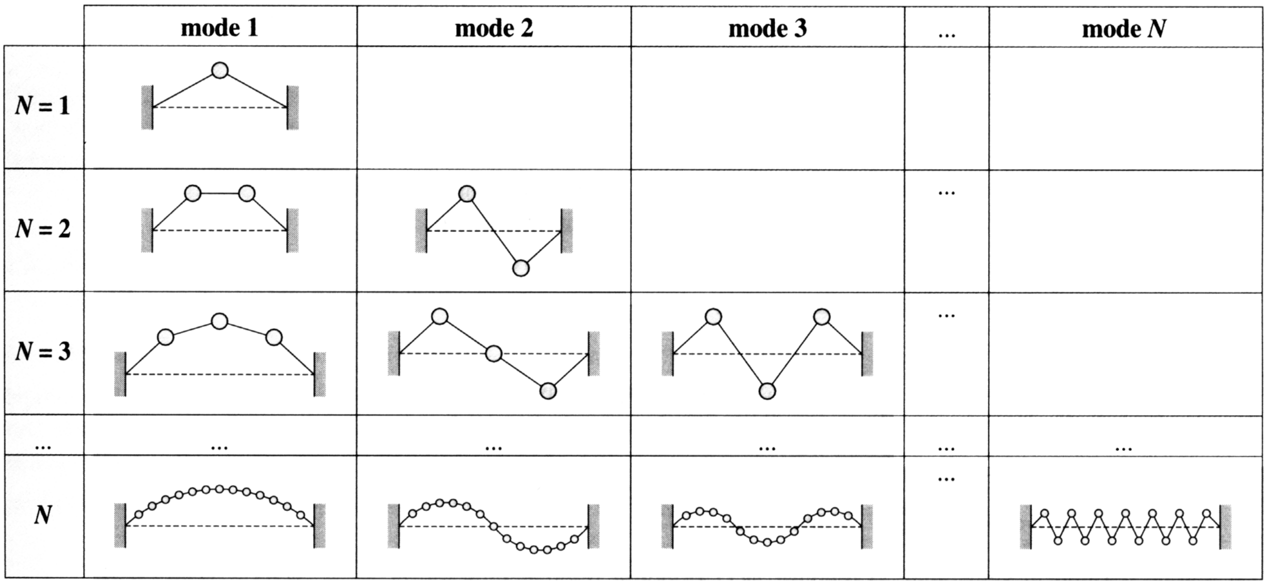
3.2. Détermination

Pour déterminer les modes propres de vibrations d'un système, il faut :

- **injecter dans les équations différentielles du mouvement des solutions de la forme : $\underline{A}_i \exp(j\omega t)$;**
- **obtenir un système d'équations algébriques en $\underline{A}_i$;**
- **déterminer les pulsations ω_i en annulant le déterminant de la matrice formée par les coefficients $\underline{A}_i$.**

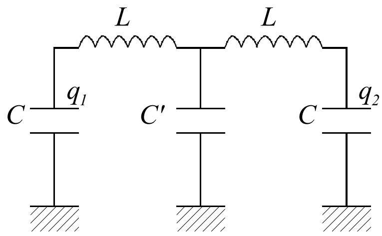
3.3. Cas de N oscillateurs couplés identiques

Dans le cas d'un système comportant N oscillateurs couplés identiques (même constante de raideur) les mouvements observables sont des superpositions des N modes propres suivants :



Exercice n° 06 : Modes propres

On considère le circuit électrique ci-dessous. Déterminer le système d'équations différentielles vérifiées par les charges q_1 et q_2. En déduire les pulsations propres.



4. Oscillations forcées d'oscillateurs couplés

4.1. Mise en équation

On considère le système du paragraphe 2.1. avec trois ressorts identiques et le support droit mobile : il décrit un mouvement sinusoïdal $x_{\text{support}} = l + X\cos(\omega t)$. Nous pouvons reprendre le calcul précédent en remplaçant l par x_{support} :

$$\left\{\begin{array}{l} m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(l_{1,eq} + x_1 - l_{vide}) + k(l_{2,eq} + x_2 - l_{1,eq} - x_1 - l_{0,vide}) \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(l + X\cos(\omega t) - l_{2,eq} - x_2 - l_{vide}) - k(l_{2,eq} + x_2 - l_{1,eq} - x_1 - l_{0,vide}) \end{array}\right.$$

à l'équilibre, nous avons : $\left\{\begin{array}{l} -k(l_{1,eq} - l_{vide}) + k(l_{2,eq} - l_{1,eq} - l_{0,vide}) = 0 \\ k(l - l_{2,eq} - l_{vide}) - k(l_{2,eq} - l_{1,eq} - l_{0,vide}) = 0 \end{array}\right.$

d'où le système :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} m\frac{d^2x_1}{dt^2} + kx_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} + kx_2 + k(x_2 - x_1) = kX\cos(\omega t) \end{array}\right.}$$

4.2. Résolution

En posant $u = x_1 + x_2$ et $v = x_2 - x_1$ le système s'écrit : $\left\{\begin{array}{l} m\frac{d^2u}{dt^2} + ku = kX\cos(\omega t) \\ m\frac{d^2v}{dt^2} + 3kv = kX\cos(\omega t) \end{array}\right.$

soit avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$:

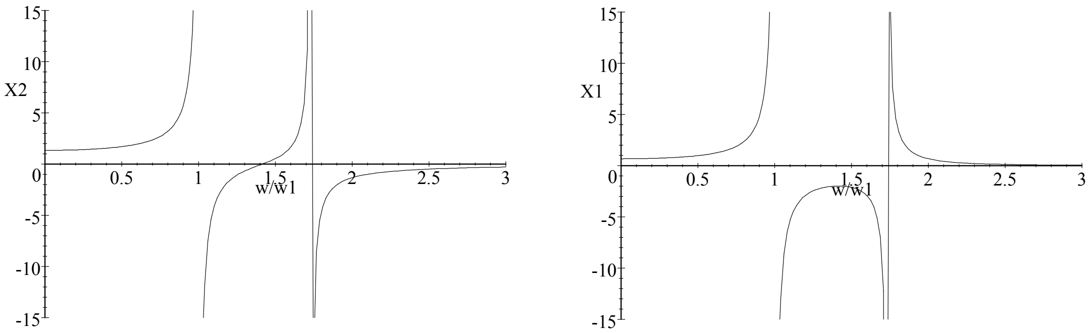
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2u}{dt^2} + \omega_1^2 u = \omega_1^2 X\cos(\omega t) \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \omega_2^2 v = \omega_1^2 X\cos(\omega t) \end{array}\right.$$

D'après les rappels du paragraphe 1.4. :

$$u(t) = U(\omega)\cos(\omega t) \text{ avec } U(\omega) = \frac{\omega_1^2 X}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad v(t) = V(\omega)\cos(\omega t) \text{ avec } U(\omega) = \frac{\omega_1^2 X}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

d'où les espressions de $x_1 et\ x_2$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}\omega_1^2 X \left[\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right]\cos(\omega t) = X_1(\omega)\cos(\omega t) \\ x_2(t) = \frac{1}{2}\omega_1^2 X \left[\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right]\cos(\omega t) = X_2(\omega)\cos(\omega t) \end{cases}$$



Réponse de deux oscillateurs non amortis couplés :
X_2 : oscillateur directement excité - X_1 : oscillateur couplé

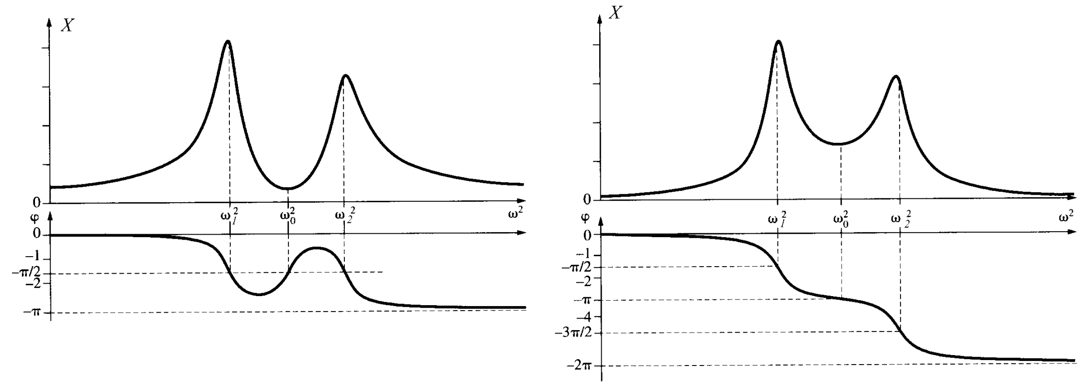
4.3. Amortissements fluides

Dans l'étude des deux oscillateurs identiques et couplés, nous avons négligé tout amortissement. Une modélisation plus réaliste nécessite d'en tenir compte même s'ils sont faibles car leur rôle qualitatif est important.
Intéressons-nous aux effets d'amortissements fluides (ou visqueux). Ce type d'amortissement introduit dans les équations du mouvement des termes proportionnels aux vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$;
Pour des amortissements relativement faibles :

- les modes propres, symétrique et antisymétrique, sont inchangés, mais les amplitudes de leurs oscillations libres sont amorties exponentiellement, avec pour chacun une fréquence d'oscillation légèrement diminuée (pour des amortissements faibles).
- pour une excitation sinusoïdale externe, les oscillations correspondant au régime libre des modes s'atténuent au cours du temps ; il ne reste donc, après un régime transitoire, que les oscillations forcées du système à la fréquence de l'excitation externe. De plus les amortissements limitent l'amplitude des oscillations lors des résonances; les maximums d'amplitude se produisent pour des pulsations d'autant plus voisines de ω_1 et ω_2 que les amortissements sont faibles.

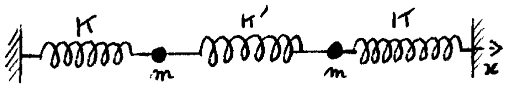
Pour une excitation donnée par $X\cos(\omega t)$, les oscillations forcées des masses sont de la forme :

$$x_i(t) = X_i(\omega)\cos(\omega t + \phi_i(\omega))$$



Oscillateurs identiques couplés avec amortissement :
gauche *:oscillateur directement excité* - droite *: oscillateur couplé*

Exercice n° 07 : Système couplé faiblement amorti



On considère deux masses m couplées à l'aide de 3 ressorts, de raideurs K,K',K pouvant se déplacer selon l'axe horizontal $x'Ox$, de X_1 et X_2 à partir de leur position d'équilibre, et soumises aux forces de frottement fluide $-f.dX_1/dt$ et $-f.dX_2/dt$.

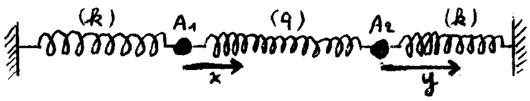
1) Ecrire les équations du mouvement ; en déduire les équations différentielles dont sont solutions la somme $S = X_1 + X_2$ et la différence $D = X_1 - X_2$.

2) On suppose le couplage faible ($K' \ll K$).

2.a) A quelle condition sur le coefficient de frottement f peut-on observer des battements amortis ?

2.b) Calculer la période des battements en fonction de m, K et K'.

Exercice n° 08 : Oscillations forcées

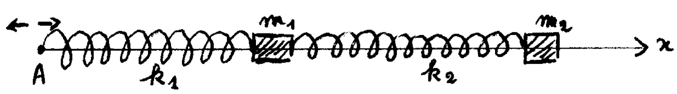


Deux points matériels A_1 et A_2 de même masse m sont reliés entre eux par un ressort de raideur q et à deux points fixes par deux ressorts ayant chacun la raideur k. L'ensemble coulisse sans frottement sur une tige horizontale fixe. On note x et y les élongations de A_1 et A_2 comptées à partir de leurs positions d'équilibre.

1) Déterminer les pulsations propres ω' et ω'' de ce système.

2) A_1 est soumis à la force $F.cos(\omega t)$ dirigée le long de la tige. Exprimer l'amplitude A du mouvement permanent de A_1 (on pourra supposer qu'il existe un très léger amortissement, de telle sorte que les termes transitoires disparaissent au bout d'un temps suffisant). Etudier les variations de l'amplitude A en fonction de ω et décrire les phénomènes correspondants.

Exercice n° 09 : Oscillations forcées d'un système {2 masses + 2 ressorts}



On considère le système représenté ci-dessus. On désigne x_1 et x_2 les déplacements des masses m_1 et m_2 à partir de leur position d'équilibre. Le système étant initialement au repos, on impose à A un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude a : $x = a.cos(\omega t)$.

Déterminer l'équation $x_2 = f(t)$ du mouvement forcé de m_2.

Exercice n° 10 : Système {2 masses + 2 ressorts} vertical

Deux cylindres homogènes C_1 et C_2, de même masse m, sont reliés entre eux par un ressort R_2, de masse négligeable, de longueur au repos L_0 et de raideur k. Le cylindre C_1 est suspendu à un ressort R_1 (identique à R_2), dont une extrémité O est fixe. On ne considérera que les mouvements de translation verticale pour G_1 et G_2 (centres de gravité de C_1 et C_2) et on supposera qu'il n'y a aucun amortissement.

1) Déterminer les longueurs à l'équilibre L_1 et L_2 des deux ressorts R_1 et R_2.

2) On donne : $k = 10\,\mathrm{N.m^{-1}}$ et $m = 300\,\mathrm{g}$. Calculer :

2.a) Les périodes propres du système ;

2.b) les rapports des amplitudes des oscillations de C_1 et C_2, pour chacune des pulsations propres.

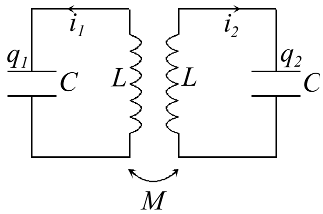
4.4. Cas de N oscillateurs

Lorsqu'un ensemble de N oscillateurs couplés (de bonne qualité) est soumis à une excitation sinusoïdale permanente de pulsation ω, l'amplitude des mouvements des oscillateurs devient importante lorsque la pulsation de l'excitation s'approche de l'une des pulsations propres du système.
Comme précédemment, l'amplitude des oscillations décroît rapidement dès que la fréquence de l'excitation dépasse celle du $N^{ème}$ mode, de pulsation maximale. Au-delà de cette pulsation, la déformation induite par l'excitation n'est quasiment pas transmise par la chaîne. Il existe une pulsation de coupure.

5. Un exemple de couplage en électricité

5.1. Circuits LC couplés par inductance mutuelle

Nous étudions un système constitué de deux circuits LC identiques couplés par une inductance mutuelle. Nous négligeons les pertes par effet joule.



5.2. Mise en équations

Le circuit obéit au système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\boxed{\begin{cases} L\frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{1}{C}q_1 + M\frac{d^2q_2}{dt^2} = 0 \\ L\frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{1}{C}q_2 + M\frac{d^2q_1}{dt^2} = 0 \end{cases}}$$

5.3. Modes propres

Les pulsations des modes propres sont données par :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}\omega_0 \ , \ \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}\omega_0 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{M}{L} \ \text{et} \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

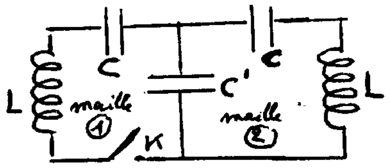
5.4. Expression des charges

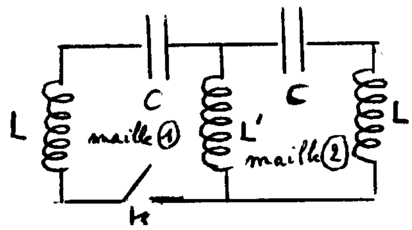
Nous supposons qu'à $t = 0$ on "ferme" les circuits et que $q_1(0) = q_0$ et $q_2(0) = 0$. Nous avons alors :

$$\begin{cases} q_1(t) = q_0 \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \\ q_2(t) = q_0 \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \end{cases}$$

<u>Exercice n° 11 :</u> Circuits LC couplés par inductance mutuelle
Démontrer les résultats précédents et donner l'allure des variations de q_1 et q_2 en fonction du temps dans le cas particulier d'un couplage faible.

<u>Exercice n° 12 :</u> Circuits LC couplés par un condensateur ou une bobine





1) Deux circuits LC, de résistance négligeable, sont couplés par la capacité C'. On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ où seul le condensateur C (de la maille 1 contenant K) porte une charge q_{1_0}.

1.a) Déterminer les pulsations propres du circuit.

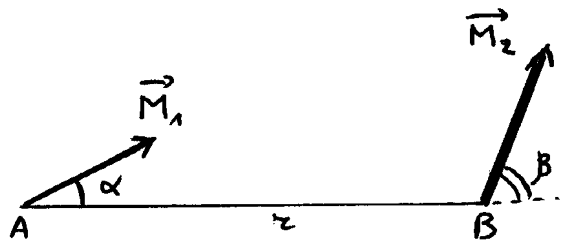
1.b) Etablir la loi de décharge $q_1(t)$ du condensateur C de la maille 1 et la loi d'établissement du courant $i'(t)$ dans la branche contenant C'.

2) Les deux circuits LC sont maintenant couplés par l'intermédiaire d'une bobine d'inductance propre L', de résistance négligeable. On ferme K à $t = 0$ où seul le condensateur C (de la maille 1 contenant K) porte une charge q_{1_0}.

2.a) Déterminer les pulsations propres du circuit.

2.b) Etablir la loi de décharge $q_1(t)$ du condensateur C de la maille 1 et la loi d'établissement du courant $i'(t)$ dans L'.

<u>Exercice n° 13 :</u> Oscillations de deux dipôles magnétiques



Deux aiguilles aimantées sont assimilées à des dipôles magnétiques de moments $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ de même module $\mathcal{M}$. Les aiguilles ,mobiles sans frottement autour de leurs axes verticaux par rapport auxquels leur moment d'inertie est J, sont repérées par les angles $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\mathcal{M}_1})$ et $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\mathcal{M}_2})$. On posera $AB = r$.

1) Exprimer le couple subi par l'aiguille B,en fonction des angles α et β.

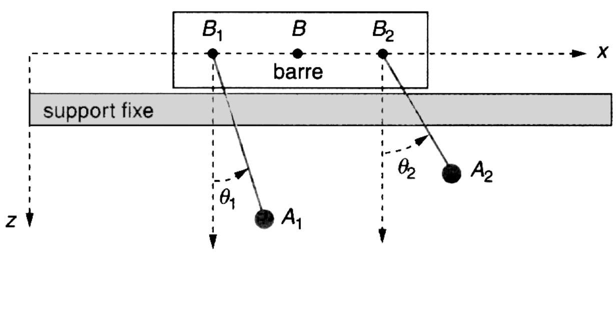
2) A est bloquée dans la position $\alpha = 0$; quelle est la position d'équilibre stable de B ? Déterminer la pulsation ω_0 des petites oscillations de B.

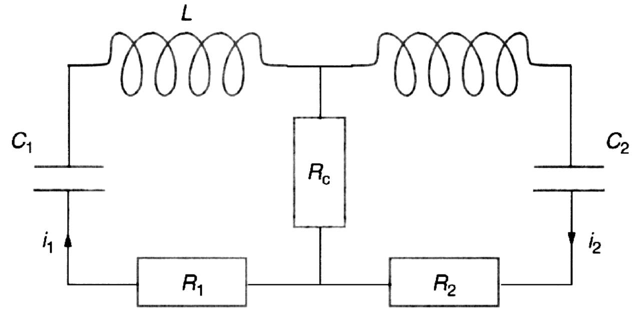
3) A et B sont libres. Etablir les équations du mouvement de A et B.

4) Déterminer les pulsations propres ω'et ω'' du système si α et β sont petits.

5) A l'instant $t = 0$, A et B sont abandonnées sans vitesse, avec $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = 0$. Exprimer les lois $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

<u>Exercice n° 14 :</u> Entraînement de deux horloges





Huygens a découvert que deux horloges de fréquences propres voisines mais non égales, posées sur une même table suffisamment près l'une de l'autre, et abandonnées avec des conditions initiales quelconques, se synchronisent naturellement c'est-à-dire finissent par osciller avec une même fréquence et un déphasage constant, le déphasage étant d'autant plus faible que les horloges sont proches.

1) Pour rendre compte de cette observation, on adopte le modèle mécanique sommaire suivant : deux pendules simples de longueurs respectives l_1 et l_2, portant à leurs extrémités A_1 et A_2 des masses identiques m, sont fixés aux points B_1 et B_2 d'une barre de masse M, posée sur un support fixe, et libre de se translater sans frottements le long de l'axe $\vec{u}_x$; on donne $B_1B_2 = 2a$. On repère le mouvement du système par l'abscisse x du milieu B de B_1B_2 et par les angles θ_1 et θ_2 que font les pendules avec la verticale. On limite les calculs à l'ordre un en θ_1 et θ_2.

1.a) Exprimer les composantes selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ des accélérations des deux masses en fonction de $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{x}$, l_1 et l_2. En déduire que les tensions des fils valent $T_1 = T_2 = mg$, et établir les équations du mouvement :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1}\theta_1 = -\frac{\ddot{x}}{l_1} \quad ; \quad \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2}\theta_2 = -\frac{\ddot{x}}{l_2}$$

1.b) Exprimer la composante selon $\vec{u}_x$ de l'accélération du centre d'inertie G du système. En déduire que :

$$\ddot{x} = -\left(\frac{ml_1\ddot{\theta}_1 + ml_2\ddot{\theta}_2}{M + 2m}\right)$$

1.c) On suppose que $l_1 = l_2 = l$. Déterminer les pulsations propres et la solution générale du problème. Interpréter la pulsation du mode antissymétrique. Interpréter la pulsation du mode symétrique lorsque $M \to \infty$.

1.d) Lorsque $l_1 = L(1-\varepsilon)$ et $l_2 = L(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$, on obtient les pulsations propres à l'ordre un en ε :

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad \omega'' = \sqrt{\frac{g\,(M+2m)}{M\,l}}$$

En déduire sans calculs ce qu'on observe si $m \ll M$. Cela permet il de rendre compte des observations de Huygens ?

2) En réalité les horloges sont amorties par des frottements et on entretient leur oscillations par un mécanisme appelé échappement. On raisonne désormais sur des oscillateurs électriques RLC et on modélise l'amortissement et l'entretien des oscillations par une résistance R qui est négative si la valeur efficace I du courant qui la traverse est inférieure à un seuil I_0. Dans le circuit-modèle de la figure ci-dessus, les deux oscillateurs R_1LC_1 et R_2LC_2 sont couplés par une résistance pure R_c. Les résistances R_1 et R_2 sont commandées respectivement par les valeurs efficaces I_1 et I_2 des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$:

$$R_1 = R_0\left(1 - \frac{I_0}{I_1}\right) \quad \text{et} \quad R_2 = R_0\left(1 - \frac{I_0}{I_2}\right)$$

2.a) Écrire les équations différentielles couplées (1) et (2) dont sont solutions les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

2.b) On cherche des solutions de la forme :

$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad ; \quad i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

Partant de l'équation (1), établir les équations :

$$R_0 I_1\left(1 - \frac{I_0}{I_1}\right) = -R_c I_1 + R_c I_2 \cos\varphi \quad ; \quad -L\omega I_1 + \frac{I_1}{C_1\omega} = R_c I_2 \sin\varphi$$

En déduire sans calcul les deux équations analogues issues de l'équation (2).

2.c) On suppose pour finir que $C_1 = C(1-\varepsilon)$ et $C_2 = C(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. En remplaçant dans les quatre équations obtenues en 2.b, on obtient :

$$I_1 = I_2 = I = \frac{R_0 I_0}{R_0 + R_c\,(1-\cos\varphi)} \quad ; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{\varepsilon}{R_c}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Comparer I et I_0 et interpréter qualitativement.
- Le modèle proposé permet-il d'interpréter les observations de Huygens ?